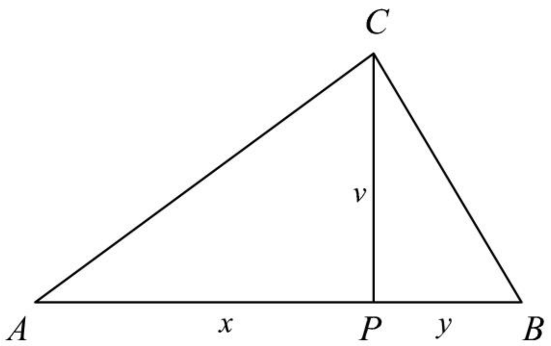
KAPITOLA 31 – TROJÚHELNÍKY

Úlohy s trojúhelníky jsou určitě většinou jednoduché, ale někdy umí zaskočit. Pečlivě si je projdi.

HESLO: Důvěřuj, ale prověřuj.

1. Pata výšky *P* rozděluje základnu *AB* v trojúhelníku *ABC* na úsečky *x* a *y*. Délka úsečky *x* je $3{,}5 \cdot 10^5$ m a délka úsečky *y* je $15 \cdot 10^4$ m. Výška *v* má délku $80 \cdot 10^3$ m. Vypočtěte obsah trojúhelníku *ABC*.



<u>Řešení:</u>

Délka strany *AB*:
$z = 3{,}5 \cdot 10^5 \text{ m} + 15 \cdot 10^4 \text{ m} = 35 \cdot 10^4 \text{ m} + 15 \cdot 10^4 \text{ m} = 50 \cdot 10^4 \text{ m} = 5 \cdot 10^5 \text{ m}$

Obsah trojúhelníku:

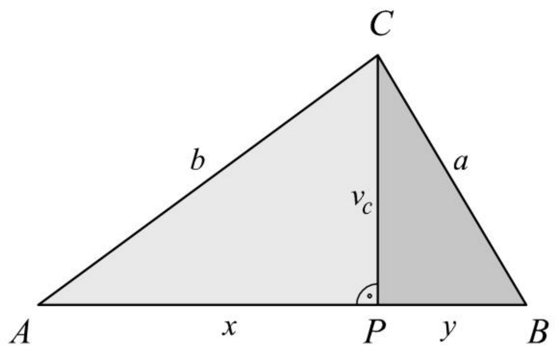
$$S = \frac{z \cdot v}{2}$$

$$S = \frac{5 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot 8 \cdot 10^4 \text{ m}}{2}$$

$$S = 20 \cdot 10^9 \text{ m}^2$$

$$S = 2 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$$

2. V obecném trojúhelníku *ABC* je délka strany a = 13 cm, délka strany b = 15 cm a výška má délku v = 12 cm. Vypočtěte obsah trojúhelníku *ABC*.



Řešení:

Na pravoúhlé trojúhelníky *APC* a *PBC* použijeme Pythagorovu větu.
Tak určíme délky úseků x a y.

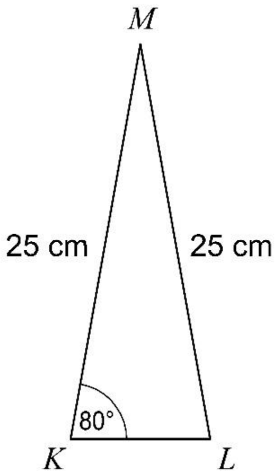
$$x^2 + v_c{}^2 = b^2$$
$$x^2 = b^2 - v_c{}^2$$
$$x^2 = (225 - 144)\ \text{cm}^2 = 81\ \text{cm}^2$$
$$x = 9\ \text{cm}$$

$$y^2 + v_c{}^2 = a^2$$
$$y^2 = a^2 - v_c{}^2$$
$$y^2 = (169 - 144)\ \text{cm}^2 = 25\ \text{cm}^2$$
$$y = 5\ \text{cm}$$

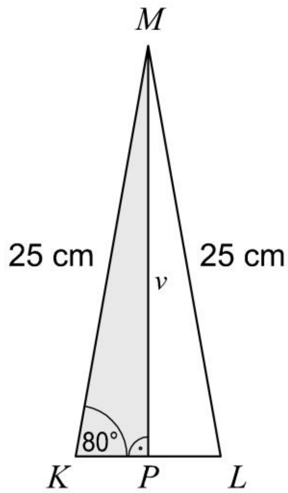
$$c = x + y = 14\ \text{cm}$$

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$$
$$S = \frac{14\ \text{cm} \cdot 12\ \text{cm}}{2}$$
$$S = 84\ \text{cm}^2$$

3. V rovnoramenném trojúhelníku *KLM* je velikost úhlu při základně 80° a délky ramen $|KM| = |LM| = 25$ cm. Určete délku základny $|KL|$.



Řešení:



Použijeme vztah pro výpočet funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku.
Kosinu je roven podílu přilehlé odvěsny a přepony.

$$\cos 80° = \frac{|KP|}{|KM|} \;\rightarrow\; |KP| = |KM| \cos 80°$$

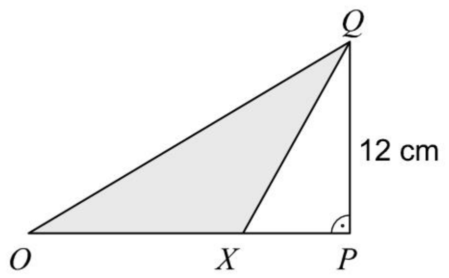
$$|KP| = 25 \cdot \cos 80° \text{ cm}$$

$$|KP| = 25 \cdot \cos 80° \text{ cm}$$

$$|KP| \doteq 4,34 \text{ cm}$$

$$|KL| \doteq 8,7 \text{ cm}$$

4. Na obrázku je trojúhelník *OPQ*. Bod *X* dělí stranu *OP* v poměru 2 : 1. Obsah trojúhelníku *OXQ* je 48 cm^2. Určete délku úsečky *OP*.



Řešení:

Vyjdeme z obsahu trojúhelníku *OXQ*. Základna je *OX*, výška odpovídá straně *PQ*.
A tu známe. Výška má tedy délku 12 cm.

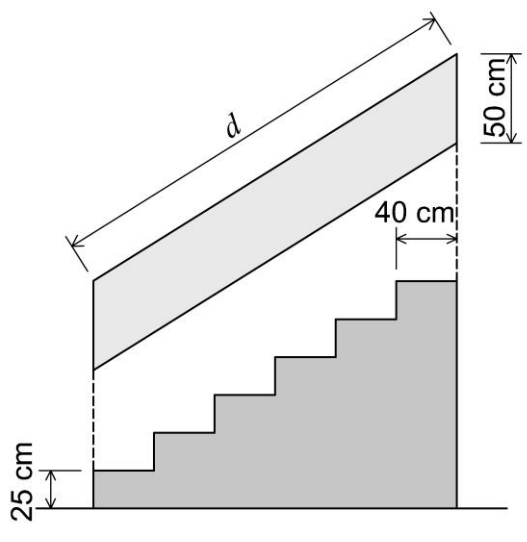
$$S_{OXQ} = \frac{|OX| \cdot 12\text{ cm}}{2} = 48\text{ cm}^2 \;\rightarrow\; |OX| = 8\text{ cm}$$

$$|OX| : |XP| = 2:1 \;\rightarrow\; |XP| = 4\text{ cm} \;\rightarrow\; |OP| = 12\text{ cm}$$

Délka úsečky *OP* je 12 cm.

---

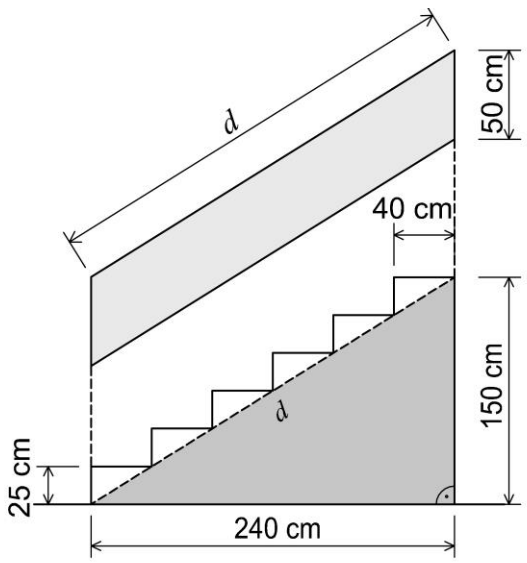
5. Nad schodištěm je dřevěné zábradlí. Vypočti obsah dřevěné desky zábradlí a délku *d* hrany zábradlí. Uvažujeme všechny schody schodiště stejné.



Řešení:

Deska je rovnoběžník. Obsah rovnoběžníku počítáme součinem základna krát výška.
Základna je 50 cm. Výška odpovídá šířce šesti schodů, $6 \cdot 40$ cm = 240 cm

$S = z \cdot v = 50\text{ cm} \cdot 240\text{ cm} = 12\,000\text{ cm}^2 = 1{,}2\text{ m}^2$



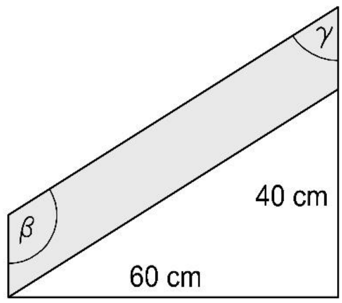
Délku hrany zábradlí vypočteme z trojúhelníku schodiště pomocí Pythagorovy věty.
Odvěsny mají délky 240 cm a 150 cm.

$d^2 = (150 \text{ cm})^2 + (240 \text{ cm})^2 = 80100 \text{ cm}^2$

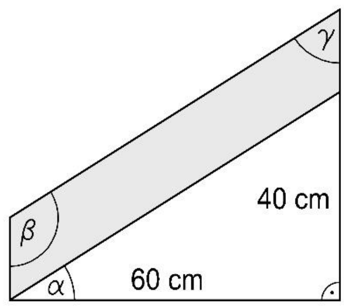
$d = 283 \text{ cm}$

---

6. Vypočtěte velikosti úhlů β a γ v rovnoběžníku na obrázku.



<u>Řešení:</u>



Nejprve určíme ze spodního pravoúhlého trojúhelníku velikost úhlu α.

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{40 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} \rightarrow \alpha = 33°41'$

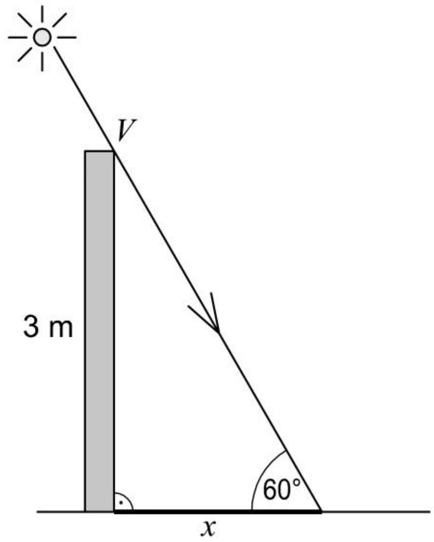
$\gamma = 90° - 33°41' = 56°19'$

$\beta = 180° - 56°19' = 123°41'$

7. Jak dlouhý stín má třímetrový sloup, když sluneční paprsky svírají s rovinou země úhel 60°?

Řešení:

Důležité je načrtnout si co nejpřesnější nákres situace.



Vycházíme z pravoúhlého trojúhelníku.
Známe protilehlou odvěsnu ke známému úhlu.
Potřebujeme přilehlou odvěsnu ke známému úhlu.

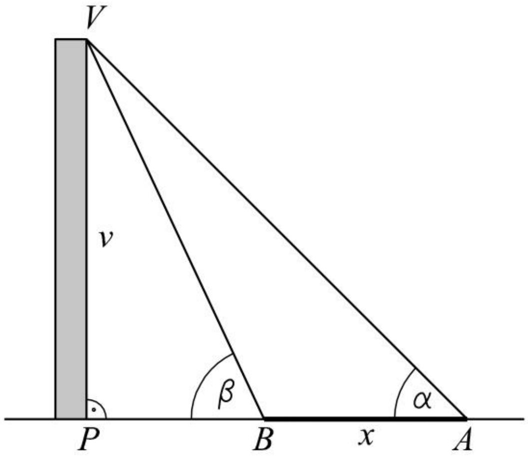
$$\operatorname{tg} 60° = \frac{3\text{ m}}{x} \rightarrow x = \frac{3\text{ m}}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{3\text{ m}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt{3}\text{ m}$$

$$x \doteq 1{,}73\text{ m} = 173\text{ cm}$$

Délka stínu je 173 centimetrů.

8. Vrchol sloupu vysokého v metrů je z jednoho bodu vidět pod úhlem α a z druhého bodu pod úhlem β. Vypočtěte obecně vzdálenost bodů x v závislosti na výšce v a velikosti úhlů.



Řešení:

Vypočteme vzdálenosti bodů A a B od paty P a odečteme je od sebe.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{|PA|} \rightarrow |PA| = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{|PB|} \rightarrow |PB| = \frac{v}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$x = |PA| - |PB|$$

$$x = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{v}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$x = v \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} \right)$$